ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHCAD В СПОРТЕ

Новицкий О.А., канд. физ.-мат. наук, доцент, ***Пономаренко В.К.,*** канд. физ.-мат. наук, доцент,
Белорусский государственный университет физической культуры,
Республика Беларусь

За последние несколько десятков лет отношение к математике значительно изменилось. Если ранее владение математическими методами было уделом незначительного количества профессионалов, то теперь наблюдается массовое применение математических методов в самых различных областях человеческой деятельности людьми, не обладающими глубокой математической подготовкой. Это связано, в первую очередь, с появлением компьютеров и ростом их вычислительной мощности и, во-вторых, их доступностью для многочисленного отряда пользователей. Сейчас, не обладая навыками программиста, любой может воспользоваться средствами математических пакетов и проводить довольно сложные расчеты, не используя специфических приемов программирования.

В деле реализации колоссальных возможностей ПК большая роль отводится созданию специализированных программных средств, позволяющих пользователю избежать рутинного программирования при решении сложных математических, физических и инженерных задач, тем самым сокращая время достижения поставленной цели.

Программное средство (пакет, система) MATHCAD, разработанное фирмой MathSoft Inc., на протяжении последних 20 лет успешно конкурирует с такими общепризнанными математическими программными средствами, как MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB, DERIVE и др. Популярность MATHCAD объясняется тем, что, наряду с огромным математическим потенциалом, программа обладает исключительно дружественным интерфейсом. Естественная математическая нотация при введении формул, простые правила редактирования, отсутствие скрытой информации на экране, интерактивная справочная система дают возможность пользователю за кратчайшее время освоить работу в среде MATHCAD.

Практически все математические методы, используемые в спорте, могут быть реализованы в среде MATHCAD. В данной статье предлагается вариант использования пакета MATHCAD для решения конкретной задачи о движении сферического тела (спортивного ядра) в воздушной среде, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Если не учитывать сопротивления воздуха, задача решается элементарными средствами. Максимальная дальность полета при нулевой начальной высоте имеет вид:

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2}. \qquad (1)$$

С учетом лобового сопротивления – силы, с которой среда препятствует движению тела относительно нее, – элементарные средства бессильны. Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши). Способы численного решения таких уравнений известны [1], но для этого надо иметь математическое образование. Мы же, используя среду MATHCAD [2], покажем, как можно решить эту задачу с приложением минимума усилий.

Величина лобового сопротивления (F_c) зависит от площади поперечного сечения тела, его обтекаемости, плотности и вязкости среды, а также относительной скорости тела:

$$F_c = S_M \cdot C_x \cdot \rho \cdot V^2, \qquad (2)$$

где S_M – площадь наибольшего сечения тела (мидель), м^2; C_x – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела (для шара он равен 0,48); ρ – плотность среды (воздуха – 1,29 кг/м^3); и V – относительная скорость среды и тела, м/с. Спортивное ядро для мужчин – цельнометаллический шар массой 7,257 кг диаметром 120 мм. Имеем

$$F_c = \pi \cdot D^2/4 \cdot 0{,}48 \cdot 1{,}29 \cdot V^2 = b \cdot V^2, \qquad (3)$$

где b = 0,007.

При построении математической модели условимся, что ось Ox системы координат направлена горизонтально в направлении выстрела, а ось Oy – вертикально вверх. Вектор скорости снаряда V(t) за время полета будет изменяться как по величине, так и по направлению, поэтому в модели рассматриваем его проекции на координатные оси. Горизонтальную составляющую скорости в момент времени t обозначим $V_x(t)$, а вертикальную – $V_y(t)$.

Пусть поверхность Земли плоская. Согласно законам механики, при сделанных предположениях движение тела в горизонтальном направлении является почти равномерным, а в вертикальном – равнозамедленным или равноускоренным с ускорением свободного падения g. Если с силой тяжести F_T все достаточно просто (она свой вектор не меняет ни по величине, ни по направлению), то сила лобового сопротивления F_C , действующая на ядро, пропорциональна квадрату скорости движения тела. Обозначим через F_X и F_Y горизонтальную и вертикальную проекции вектора силы лобового сопротивления, причем $F_X/F= V_X/V$, $F_Y/F= V_Y/V$. На рисунке 1 отображены силы, действующие на тело во время полета, и направления векторов скорости.

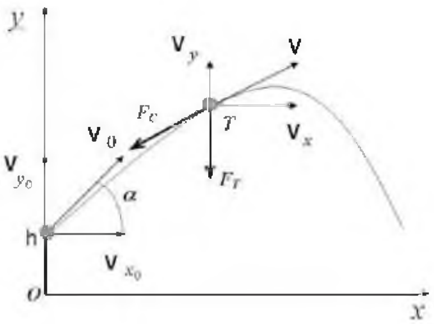

Рисунок 1 – Схема движения ядра, брошенного под углом к горизонту

Используя основное уравнение динамики (2-й закон Ньютона) в проекциях на оси координат, сводим задачу к необходимости решения системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \quad -\frac{b}{M} V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = -g - \frac{b}{M} V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2}; \tag{4}$$

$$X(0) = 0; \qquad Y(0) = h;$$

$$V_x(0)=V_0\cos(\alpha);\ V_y(0)= V_0\sin(\alpha).$$

В среде MATHCAD решение выглядит следующим образом:

$$g := 9.87 \qquad M := 7.257 \qquad T := 2.3 \qquad \alpha := \frac{\pi \cdot 45}{180} \qquad b := 0.007 \qquad V0 := 15$$

Начальные условия Вектор-функция переменных

$$IC := \begin{pmatrix} 0 \\ V0\cdot\cos(\alpha) \\ 1.8 \\ V0\cdot\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad D(t,X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ \frac{-b}{M}\cdot X_1\cdot\sqrt{(X_1)^2+(X_3)^2} \\ X_3 \\ -g-\frac{b}{M}\cdot X_3\cdot\sqrt{(X_1)^2+(X_3)^2} \end{bmatrix}$$

Функция решения

$$S := rkfixed(IC, 0, T, 40, D)$$

При решении использовались замены переменных: X_0=x, $X_1=\frac{\partial x}{\partial t}$, X_2=y, $X_3=\frac{\partial y}{\partial t}$. Результаты решения содержатся в векторе S: $S^{<0>}$=t, $S^{<1>}$=x, $S^{<2>}=\frac{\partial x}{\partial t}$, $S^{<3>}$=y, $S^{<4>}=\frac{\partial y}{\partial t}$. На рисунке 2 изображена рассчитанная траектория ядра.

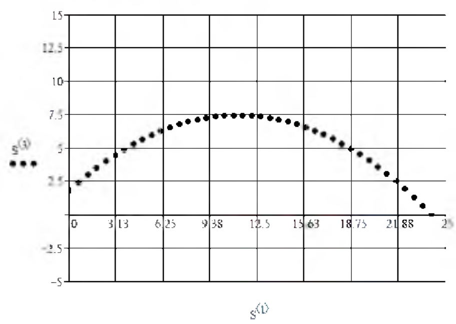

Рисунок 2 – Расчетная траектория движения ядра

Изменяя параметры: угол α, начальную скорость V_0, начальную высоту h и др., можно проанализировать полученные результаты и сделать соответствующие выводы.

1. Боглаев, Ю. П. Вычислительная математика и программирование / Ю. П. Боглаев. – М.: Наука, 1990. – 546 с.
2. Быкадоров, Ю. А. Физика в дифференциальных уравнениях с использованием MATHCAD / Ю. А. Быкадоров, О. А. Новицкий. – Минск: БГПУ, 2003. – 74 с.