Тема 1. Матрицы. Определители.

Вопросы для обсуждения:

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители и их свойства.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Ранг матрицы и его вычисление.
5. Обратная матрица

Матрицей называют множество m× n чисел, расположенных в прямоугольной таблице, из m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Первый индекс обозначает номер строки, второй – номер столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Матрица имеет размерность $m\times n$, если у неё m строк и n столбцов.

Матрицу называют квадратной матрицей, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m=n$.

Главную диагональ квадратной матрицы составляют её элементы $a_{11},\ a_{22},\dots,\ a_{nn}$.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице; единичная матрица обозначается E или E_n, где n – порядок матрицы.

Нулевой матрицей (нуль-матрицей) размерности $n\times m$, обозначаемой $0_{n\times m}$, называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** к данной.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^T_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается A' или A^T.

Равными, называются матрицы, если они имеют одинаковые размерности.

Основные действия над матрицами

1. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру. Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы.

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

2. Умножение матрицы на число.

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на данное число.

3. Умножение матриц.

Умножать можно только согласованные матрицы?

Определение. Матрица A называется согласованной с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Коммутирующими называют матрицы A и B, если для них выполнено условие $AB = BA$.

Свойства операции умножения матриц:

а) ассоциативность: если определено одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$, то определено также и второе произведение, и имеет место выше приведённое равенство $(AB)C = A(BC) = A \cdot B \cdot C$;

б) дистрибутивность: если C – такая матрица, что определено произведение AC, то определены произведения BC и $(A+B)C$ и верно равенство $(A+B)C = AC + BC$ (A и B – матрицы одинаковых размеров);

в) дистрибутивность: если A – такая матрица, что определено произведение AB, то определены произведения AC и $A(B+C)$ и верно равенство $A(B+C) = AB + AC$ (B и C – матрицы одинаковых размеров);

г) $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

Свойства операций сложения и умножения на число.

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. $A+O=A$
4. $A-A=O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
7. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Свойства операции умножения матриц.

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$

4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

5. $(A+B)^T = A^T + B^T$

6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Определение. Квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число, называемое ее **определителем** (детерминантом).

- n=1. $A = (a_{11}), \det A = a_{11}$
- n=2. $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- n=3.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - \\ - a_{32}a_{23}a_{11} \end{matrix}$$

Свойства определителей.

- Если все элементы столбца (строки) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
- Если все элементы некоторого столбца (строки) определителя содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
- Если в определителе поменять местами два параллельных столбца (строки), то знак определителя изменится на противоположный.
- Если у определителя элементы двух параллельных столбцов (строк) одинаковы, то определитель равен нулю.
- Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.
- Умножение всех элементов одного ряда определителя на число k равносильно умножению самого определителя на число k.
- Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, умноженные на любое число.

Определение 1. Минором некоторого элемента определителя n-го порядка называется определитель порядка (n-1), полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца (на пересечении которых находится элемент a_{ij}). Обозначается M_{ij}

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц.

Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле:

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$ где E – единичная матрица.

Для любой квадратной матрицы A можно поставить в соответствие определитель, который обозначается $\det A$.

Невырожденной называется матрица A, если $\det A \neq 0$. Если матрица невырожденная, то существует единственная обратная ей матрица A^{-1}, причем,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \Pi$$

где $\Pi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Свойства обратной матрицы:

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Обозначается $r\ (A)$ или $rang\ (A)$.

Теорема. Ранг матрицы не изменится, если:

а) все строки заменить столбцами;

б) поменять местами две строки (два столбца);

в) умножить каждый элемент строки (столбца) на один и тот же множитель, отличный от нуля;

г) прибавить к элементам одной строки (столбца) соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на один и тот же множитель.

Такие преобразования называются элементарными.

Эквивалентными называются матрицы A и B, если одна из другой получаются с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначают следующим образом: $A \sim B$.

Контрольные вопросы:

1.Понятие матрицы.

2. Виды матриц.

3. Операции сложения, умножения матрицы на число, умножения матриц.

4. Понятие транспонирования матрицы.

5. Понятие обратной матрицы и схема её нахождения.

6. Понятие ранга матрицы.

7 Понятие определителя первого, второго, третьего порядков.

9. Правила нахождения определителей второго, третьего порядков.
10. Свойства определителей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. – 2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.
6. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений и их исследование как моделей в сфере туризма и гостеприимства

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие алгебраического уравнения. Системы линейных уравнений.
2. Критерий совместности системы линейных уравнений.
3. Решение систем: метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.
4. Практическая направленность использования основ линейной алгебры в сфере туризма и гостеприимства.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

где числа a_{ij} называются коэффициентами системы,

а числа $b_1,...,b_m$ – свободными членами.

Решением системы (1) называется множество значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при которых каждое из уравнений системы обращается в числовое равенство.

Система называется совместной, которая имеет хотя бы одно решение.

Система называется несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Система называется определённой, имеющая единственное решение.

Система называется неопределённой, которая имеет более одного решения.

Однородной называется система, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$. В противном случае система называется неоднородной.

Матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Метод Крамера

Если определитель неоднородной системы уравнений отличен от нуля, т.е. определитель не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

где $D_i (i = 1,2, \ldots, n)$ - определитель, получаемый из определителя D заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим правило Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Если $D = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений).

Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Ответ рассчитывается по формулам: $x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$

Решение системы с помощью обратной матрицы

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме: $A \cdot X = B$, Тогда, если определитель $\Delta \neq 0$, то система совместна и определённа, её решение задаётся формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Согласно формуле нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1} \cdot B$.

Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Если $|A| = 0$, то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

Первый этап система
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$
приводится к одной из следующих систем:

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (3)$$

где $k < n$.

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_n = b_k, \end{cases} \qquad (4)$$

где $k \leq n$.

Второй этап:

- система (2) имеет единственное решение, значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} – из предпоследнего,…,значение x_1 – из первого;
- система (3) имеет бесконечное множество решений;
- система (4) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять её последнему уравнению.

Нет такой отрасли науки и приложений, где в том или ином виде не использовались бы системы линейных алгебраических уравнений. При решении экономических задач системы линейных уравнений наиболее используемы как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных проблем. Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является призводителем, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в 1936 г. в трудах известного американского экономиста В.В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929-1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Линейная модель торговли. Одним из примеров экономического процесса, приводящего к понятию собственного числа и собственного вектора матрицы, является процесс взаимных закупок товаров. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расходуются на покупку товаров. Здесь рассматривается линейная модель обмена, или, как ее еще называют, модель международной торговли.

Контрольные вопросы:

1. Критерий совместности системы линейных уравнений.
2. Матричный способ решения системы уравнений (метод обратной матрицы).
3. Метод Крамера решения систем уравнений.
4. Метод Гаусса решения систем уравнений.
5. Понятие однородных систем уравнений.
6. Теорема Кронекера-Капелли.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /
А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, – Минск, Вышейшая школа – 2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

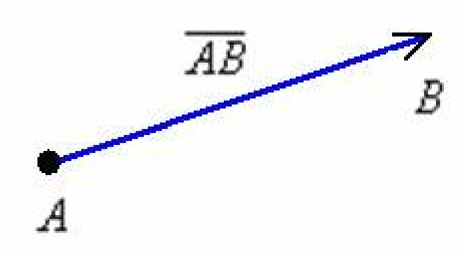
6. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 3. Системы координат. Понятие вектора. Произведения векторов

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие вектора. Действия над векторами.
2. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Их геометрический смысл.
3. Критерий перпендикулярности, коллинеарности, компланарности векторов.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или одной буквой $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...).



Модулем (длиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Единичным называется вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор обозначают $\vec{e}$.

Нулевым называется вектор, длина которого равна нулю. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Коллинеарными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Компланарными называются три (и более) вектора, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Равными называются два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$), если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Действия над векторами.

Декартовы прямоугольные координаты вектора. Длина вектора.

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет угол φ с осью l.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис1), взятой со знаком «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «минус» в противном случае.

Проекцию вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l можно вычислить по формуле:

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$$

Декартовыми прямоугольными координатами x, y, z вектора $\vec{a}$ называются его проекции на соответствующие координатные оси Ox, Oy, Oz.

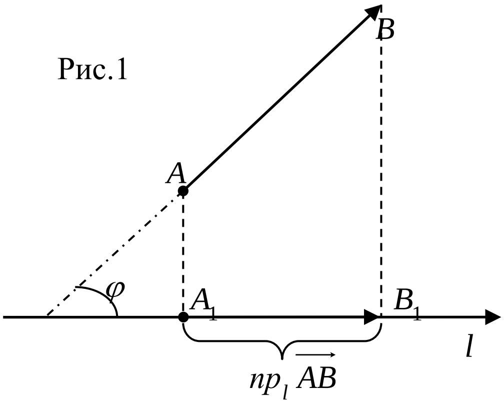


Рис.1

Вектор $\vec{a}$ с координатами x, y, z записывают в виде $\vec{a} = (x; y; z)$ или $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно. Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

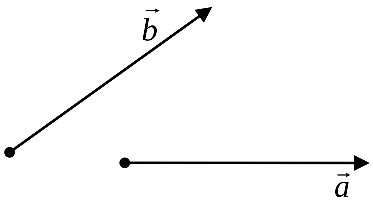
Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты находим по формулам:

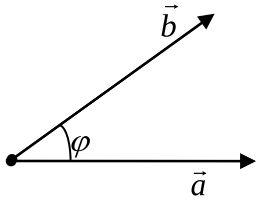
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$





Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переместительный закон.
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ – распределительный закон.
3. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$, *вектор* $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$
5. Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ или $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

6. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

8. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

<u>Векторным произведением</u> вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
- упорядоченная тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая (если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки). Будем пользоваться правыми системами координат.

Обозначения векторного произведения: $\boldsymbol{\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]}$, $\boldsymbol{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}}$

Свойства векторного произведения:

- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}], \alpha \in R$
- $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
- Условие коллинеарности векторов: $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$, в частности, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$

Векторное произведение векторов $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ можно записать в виде символического определителя

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, получают координаты векторного произведения

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число, равное векторному произведению $[\vec{a}, \vec{b}]$ умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Верны следующие равенства: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$

Смешанное произведение векторов, если вектора заданы координатами:

$$\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2), \vec{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$$

вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Формулы деления отрезка в данном отношении

Формулы координат середины отрезка

Если точка М – середина отрезка M_1M_2, то ее координаты вычисляются по формулам:

$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, делящий отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ в данном отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$, определяется формулой $\bar{r} = \frac{m_1\overline{r_1}+m_2\overline{r_2}}{m_1+m_2}$ или $\bar{r} = \frac{\overline{r_1}+\lambda\overline{r_2}}{1+\lambda}$

Координаты точки М выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие вектора.
2. Понятие единичного и нулевого вектора.
3. Линейные операции над векторами.
4. Модуль вектора, формула расстояния между двумя точками.
5. Понятие коллинеарности векторов.
6. Понятие проекции вектора на ось.
7. Скалярное, векторное произведение векторов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра:справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, – Минск, Вышейшая школа. – 2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

6. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 4. Различные виды уравнений прямой на плоскости

Вопросы для обсуждения:

1. Прямая линия на плоскости.
2. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
3. Применение метода координат, векторов к решению практических задач.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение прямой $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла между положительным направлением оси $\boldsymbol{Ox}$ и данной прямой: $k = tg\alpha$,

2. Общее уравнение прямой.

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа.

При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл. $k = -\frac{A}{B}$

Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ $(C = 0)$ – прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ $(B = 0)$ – прямая параллельна оси Oy;

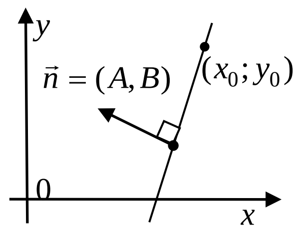
$By + C = 0$ $(A = 0)$ – прямая параллельна оси Ox;

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Oy;

$By = 0$ $(A = C = 0)$ – прямая совпадает с осью Ox.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором:

$A(x – x_0) + B(y – y_0) = 0$



Где $\vec{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой, (x_0, y_0) – координаты данной точки.

Заметим, что $\vec{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой ($\vec{n}$ – перпендикулярен прямой).

4. Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

где a и b – длины отрезков (с учётом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно.

Направляющим вектором прямой называется всякий ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и с заданным угловым коэффициентом $\mathrm{y}-\mathrm{y}_0 = \mathrm{k}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)$

где k – угловой коэффициент прямой, (x_0, y_0) – координаты данной точки.

6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, где $y_1 \neq y_2, x_1 \neq x_2$ имеет вид: $\frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_1}{\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1} = \frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1}$, $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1}$

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Под углом между прямыми на плоскости понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то

угол φ между ними вычисляется с помощью формулы

$$tg\ \varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

- условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$k_1 = k_2$$

- условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2имеет вид

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

Если прямые заданы в общем виде ,

- то условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

- условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Расстоянием d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + c = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую и вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Контрольные вопросы:

1. Общее уравнение прямой.
2. Понятие направляющего и нормального вектора прямой.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором.
7. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным направляющим вектором.

9. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

10. Расстояние от точки до прямой.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. – 2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

6. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 5. Линии второго порядка

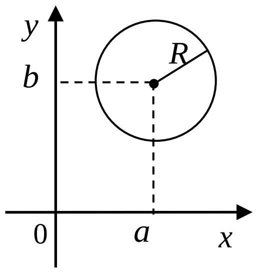
Вопросы для обсуждения:

1. Линии второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола).
2. Канонические уравнения линий.

Окружность.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки O этой же плоскости на одно и тоже расстояние $R > 0$. Точка O называется центром, а R – радиусом окружности.

В прямоугольной системе координат **уравнение окружности** имеет вид



$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = R^2$$

где (a, b) – координаты её центра, R – радиус окружности.

Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е.$a = 0$, $b = 0$, то уравнение имеет вид:

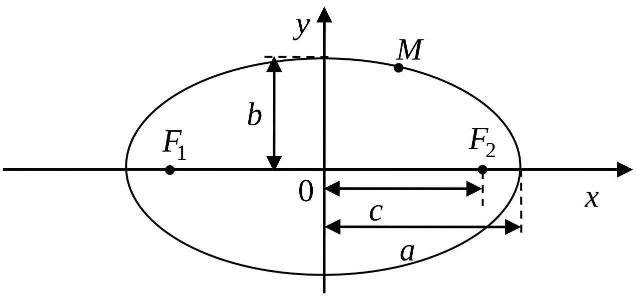
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где a — большая полуось, b— малая полуось эллипса.



Если $a > b$, то:

числа a, b и c связаны соотношением

$c^2 = a^2 - b^2$;

фокусное расстояние равно;$2c = F_1F_2$

Форма эллипса характеризуется его эксцентриситетом.

Эксцентриситетом ε эллипса называют число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \ (0 < \varepsilon < 1)$$

Директрисами эллипса называются прямые, определяемые уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

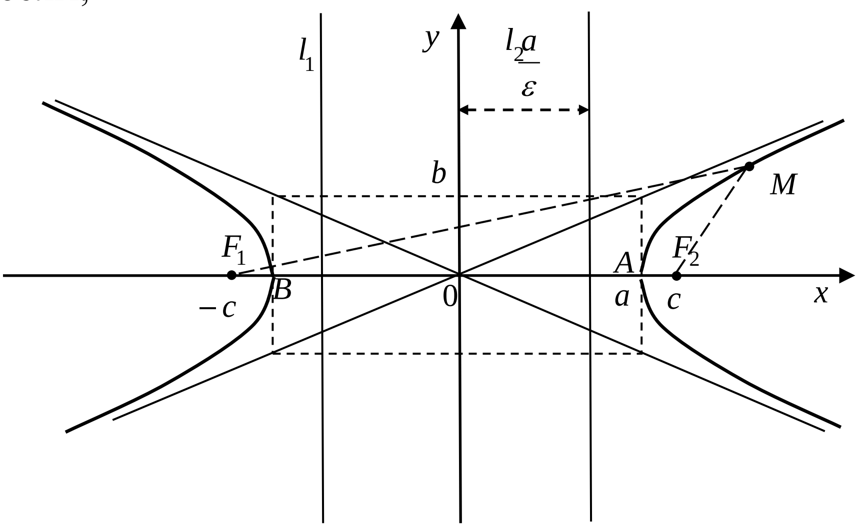
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где a – действительная, b – мнимая полуось гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ – соответственно действительная и мнимая оси гиперболы. Для гиперболы :

1) координаты фокусов:$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где c – половина расстояния между фокусами

2) числа a, b, cсвязаны соотношением
$b^2 = c^2 - a^2$

3) точки A и B называются вершинами гиперболы, точка O – центром гиперболы;



Эксцентриситетом ε гиперболы называется число:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1)$$

асимптотами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

директрисами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$

координаты фокуса $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Уравнение директрисы параболы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Понятие линии второго порядка.
2. Каноническое уравнение окружности.
3. Каноническое уравнение эллипса, характеристики эллипса.
4. Каноническое уравнение гиперболы, характеристики гиперболы.
5. Каноническое уравнение параболы, характеристики параболы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск, ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. – 2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.
6. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 6. Классификация событий. Различные определения вероятности события

Вопросы для обсуждения:

1. Действия над событиями. Соотношения между событиями.
2. Различные определения вероятности события.
3. Свойства вероятности.
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.
5. Формулы Бейеса.

События. Виды событий

- Наблюдение явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно, в теории вероятностей принято называть испытанием. (экспериментом**)**
- Результат, исход испытания называется событием .

Событием в теории вероятностей называется всякий факт ,который может произойти или не произойти в результате какого-то опыта (испытания).

По возможности появления события делятся на достоверные, невозможные, случайные.

Достоверное событие – *это такое событие, которое в* результате данного испытания обязательно наступит.

Невозможное событие – *это такое событие, которое в* результате данного испытания не может произойти.

Случайное событие – *это такое событие, которое в результате* данного испытания может произойти, но может и не произойти. Например, в турфирме работают 3 сотрудника. Событие состоящее в том, что в данный момент заболевшими окажутся все 3 сотрудника – случайное.

- События называют несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий.
- События называют совместными, если в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает появление другого.
- События называют совместными, если в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает появление другого.

Множество несовместных событий образует полную группу событий, если в результате отдельно взятого испытания обязательно появится одно из этих событий. В частности, любая пара противоположных событий образует полную группу.

Несколько событий образуют *полную группу, если в результате* испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

Определение 1. Событием A будем называть любое подмножество множества элементарных событий Ω ($A \subseteq \Omega$)

Определение 2. Суммой событий А и В называется событие А+В такое, что наступит событие А, либо наступит событие В , либо оба вместе.

Определение 3. Произведением событий А и В называется событие АВ такое, которое происходит при одновременном наступлении событий А и В.

Определение 4. Событием, противоположным событию

В (обозначается), называется такое событие, при котором не происходит событие В.

Определение 5. Разностью событий А и В называется такое событие, которое состоится, если событие А произойдет, а событие В не произойдет.

$$A - B = \overline{AB}$$

Определение 6. Два события называются **совместными,** если наступление одного из них не исключает наступление другого в том же испытании.

Определение 7. Два события называются **несовместными,** если их совместное наступление невозможно.

- **Определение 1 (классическое)**. Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, т.е. $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$
- где m – число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события А;
- n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

<u>Геометрической вероятностью</u> события А называется отношение меры (длина, площадь, объем) области, благоприятствующей появлению события А, к мере всей области.

Свойства вероятности:

1. Если А – достоверное событие, то Р(А) =1.
2. Если А – невозможное событие, то Р(А) = 0 .
3. Если А – случайное событие, то 0 < Р(А) < 1 .

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \le P(A) \le 1$.

Теорема 1. Если события А и В несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Для случая трех событий справедливы формулы

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) + P(ABC)$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC)$$

Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

$$P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Статистическое определение вероятности

Вероятностью события называют число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Формула Байеса.

Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют полную систему событий. Событие А определено на том же множестве элементарных событий и может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, ..., B_n$

События $B_1, B_2, ..., B_n$ называют гипотезами, т.к. заранее неизвестно, какое из событий наступит. Предположим, что произведено испытание, в результате которого наступило событие А.

Ставится задача определить, как изменились вероятности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$ в связи с наступлением события А.

Требуется определить условные вероятности $P(B_1/A), P(B_2/A), ..., P(B_n/A)$

По теореме умножения вероятностей: $P(AB_1) == P(B_1)P(A/B_1) = P(A)P(B_1/A)$

Отсюда можно найти: $P(B_1/A)=\dfrac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$

где $P(A)\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$

Формула Байеса в общем виде:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j)}$$

Контрольные вопросы:

1. Действия над событиями.
2. Соотношения между событиями.
3. Свойства вероятности.
4. Статистическое определение вероятности.
5. Геометрическое определение вероятности.
6. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
7. Формула полной вероятности.
8. Формулы Бейеса.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

4. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

5. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

6. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

7. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

8. Маталыцкий М.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М.А. Маталыцкий , Г.А.Хацкевич. – Минск: Вышейшая школа, 2017. – 591 с.: ил.

Тема 7. Комбинаторика и вероятность.

Вопросы для обсуждения:

1. Множество, подмножество, упорядоченное множество, кортеж. Основные свойства множеств.
2. Правило комбинаторного сложения и умножения.
3. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями и без повторений.
4. Различные способы решения задач на составление и перечисление комбинаций в сфере туризма и гостеприимства.

Комбинаторика - раздел математики о выборе и размещении некоторого множества на основании каких-либо условий.

Множество. Примеры множеств.

Множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам).

пустое множество: $\varnothing$ – множество, в котором нет ни одного элемента

Подмножества

Если любой элемент множества В принадлежит множеству А, то множество В называется подмножеством А.

Упорядоченное множество – это такое множество, элементы которого занумерованы определенным образом.

Кортеж – это конечная упорядоченная последовательность элементов какого-либо множества, которая допускает повторения элементов.

Действия над множествами:

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **или** множеству B:

$$C = A \cup B$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит **и** множеству A, **и** множеству B.

$$C = A \cap B$$

Разностью множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **и** не принадлежит множеству B:

$$C = A \setminus B$$

Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из этих элементов можно составить различные комбинации.

Определение 1. Перестановкой из n элементов называется число способов, при помощи которых можно расположить n различных элементов на n различных местах. $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Формулы для числа перестановок

Без повторений $\mathrm{P_n} = \mathrm{n}!$

С повторениями $\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$$

Определение 2. Размещением из n элементов по m называется число способов, при помощи которых можно расположить m различных элементов на m различных местах, выбранных из n. $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Без повторений $\boldsymbol{A_n^n = \frac{n!}{(n-m)!}}$

С повторениями $\overline{A_n^m} = n^m$

Сочетанием из n элементов по m называется число способов, при помощи которых можно выбрать m различных элементов из данных n элементов.

Без повторений $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

С повторениями $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$

Правило сложения*:* Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B другими n способами, причем выборы объектов A и B несовместимы, то выбор «A или B» можно выполнить m+n способами.

Правило умножения*:* Если некоторый объект A можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) n способами, то выбор «A и B» можно выполнить $m \cdot n$ способами.

- Если в условии задачи звучит «И», то выбираем умножение.
- Если в условии задачи нужно найти «ИЛИ», то пользуемся правилом сложения.

Контрольные вопросы:

1. Множество, подмножество, упорядоченное множество, кортеж. Основные свойства множеств.
2. Правило комбинаторного сложения и умножения.
3. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями и без повторений.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

4. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин,

П. А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

5. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
6. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. –491 с.: ил.
7. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.
8. Маталыцкий М.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М.А. Маталыцкий , Г.А.Хацкевич. – Минск: Вышейшая школа, 2017. – 591 с.: ил.

Тема 8.Основные понятия теории графов.

Вопросы для обсуждения:

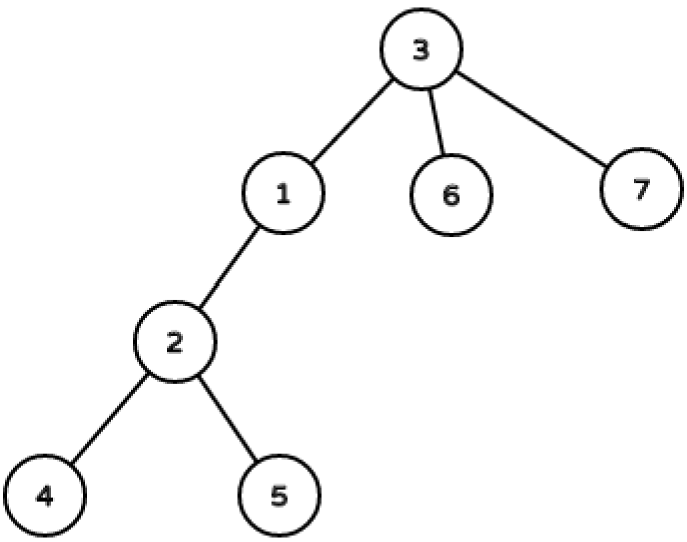
1. Основные понятия теории графов.
2. Ориентированные графы.
3. Эйлеровы графы

Графом называется конечное множество точек, расположенных на плоскости, некоторые пары из которых соединены линией. Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными.

Конечный граф **–** граф с конечным количеством рёбер и вершин.

- Бесконечный граф – граф, конец которого в определённом направлении(ях) простирается до бесконечности.
- Неориентированный граф – граф, рёбра которого не имеют определённого направления.
- Ориентированный граф **–** граф, рёбра которого имеют определённое направление.
- Связный граф – граф, в котором отсутствуют недостижимые вершины (вершины, не связанные с остальными).
- Несвязный граф – граф, в котором существуют недостижимые вершины.

Графы обычно изображаются в виде геометрических фигур, так что вершины графа изображаются точками, а ребра – линиями, соединяющими точки



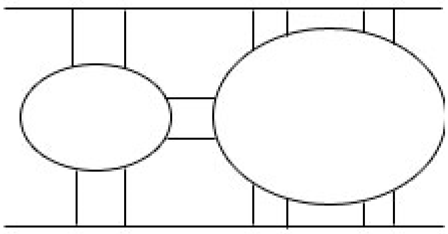
Граф называется полным, если каждая пара его вершин соединена ребром.

Свойство 1. Число ребер в полном графе с n вершинами равно $\frac{n(n-1)}{2}$

Свойство 2. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

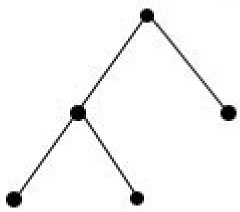
Число ребер, выходящих из вершины называется степенью вершины и обозначается $deg(u)$ и $d(u)$

Один из первых опубликованных примеров работ по теории графов и применения графов – работа о «задаче с Кёнигсбергскими мостами» (1736 г.), автором которой является выдающийся математик 18-го века Леонард Эйлер. В задаче даны река, острова, которые омываются этой рекой, и несколько мостов. Вопрос задачи: возможно ли, выйдя из некоторого пункта, пройти каждый мост только по одному разу и вернуться в начальный пункт?



Ответ Эйлера на вопрос задачи состоит в следующем. Если бы у этой задачи было положительное решение, то в получившемся графе существовал бы замкнутый путь, проходящий по рёбрам и содержащий каждое ребро только один раз. Если существует такой путь, то у каждой вершины должно быть только чётное число рёбер. Но в получившемся графе есть вершины, у которых нечётное число рёбер. Поэтому задача не имеет положительного решения. Эйлеровым графом называется граф, в котором можно обойти все вершины и при этом пройти одно ребро только один раз. В нем каждая вершина должна иметь только четное число ребер.

Деревом называется связный граф без циклов (рисунок ниже). Любые две вершины дерева соединены лишь одним маршрутом. **Дерево** – это связный граф без циклов. Деревья особенно часто возникают на практике при изображении различных иерархий. Например, популярны генеалогические деревья.



Число q рёбер графа находится из соотношения $q = n - 1$, где n - число вершин дерева.

В виде графов, особенно в виде деревьев, строятся многие математические модели.

Метод дерева решений применяется в задачах классификации и прогнозирования, когда решения приходится принимать в условиях риска, неопределённости и исход событий зависит от вероятностей. На каждое решение влияют какие-то определённые факторы, и у каждого решения есть свои последствия, которым присущ вероятностный характер. В этих условиях процесс принятия решений является последовательным и **метод дерева решений** предполагает определять, какие действия следует предпринять в каждой вершине дерева.

Дерево решений – математическая модель, которая задаёт процесс принятия решений так, что будут отображены каждое возможное решение, предшествующие и последующие этим решениям события или другие решения и последствия каждого конечного решения.

Контрольные вопросы:

1. Основные понятия теории графов.
2. Ориентированные графы.
3. Эйлеровы графы.
4. Дерево решений**.**

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

4. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

5. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. –303 с.

6. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

7. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

8. Маталыцкий М.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М.А. Маталыцкий , Г.А.Хацкевич. – Минск: Вышейшая школа, 2017. – 591 с.: ил.

Тема 9. Приложения теории графов в сфере туризма и гостеприимства.

Вопросы для обсуждения:

1. Примеры экономических задач, приводящих к понятию графа: управление проектами, транспортные задачи, модели коллективов и групп.

Язык графов оказывается удобным для моделирования многих физических, технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

В практике используются следующие математические модели в виде графа.

1. Блок-схема компьютерной программы (вершины - команды, рёбра - переходы между команды), используемая для разработки и тестирования самой программы.
2. Граф подпрограмм (вершины - подпрограммы, рёбра - порядок вызова подпрограмм), используемый для проектирования и анализа компьютерных программ.
3. Граф структуры данных (вершины - данные или простейшие типы данных, рёбра - отношения между данными), используемый для проектирования и оптимизации структур данных.
4. Граф зависимости команд машинного кода (вершины - команды, рёбра - зависимости между командами), используемый в оптимизационном компилировании и конвейеризации работы процессора.
5. Граф процессов операционной системы (вершины - процессы операционной системы, рёбра - акты генерирования процессов), используемый в моделировании работы операционной системы.
6. Граф конечного автомата (вершины - состояния автомата, рёбра - переходы), используемый в исследовании конечных автоматов и языков и в инженерии программного обеспечения.
7. Граф утверждений математической теории (вершины - утверждения, рёбра - отношения логического следования), используемый для доказательства математических заключений и анализа математических теорий.
8. Функциональный граф (вершины - элементы множества, рёбра - отношения логического следования), имеющий широкое использование в математике.
9. Граф величин-зависимостей (вершины - численные величины и взаимосвязи между ними, рёбра - отношения вовлечённости величины), используемый в решении различных математических задач.
10. Граф метрики (вершины - любые физические или нефизические объекты или их множества, рёбра - геометрическая, структурная, функциональная или эволюционная близость этих объектов), используемый для анализа больших множеств.

11. Дерево решений (вершины - критические состояния, рёбра - решения), используемый в принятии решений в экономике, управлении, диагностике инженерных систем.

12. Системный граф (вершины - компоненты системы, рёбра - взаимодействие компонент), используемый в проектировании и анализе систем.

13. Граф обратных связей (вершины - параметры какого-либо процесса, ориентированные рёбра с весами "+" или "-" - зависимость изменений параметров, соответствующих вершинам), используемый в исследованиях изменений составных частей процессов или объектов.

14. Граф причинно-следственных связей (вершины - состояния какой-либо системы, ориентированные рёбра - причинно-следственные связи), используемый в исследованиях больших систем и сложных процессов.

15. Граф конфликтов (вершины - состояния какой-либо системы, рёбра - конфликты между состояниями), используемый в анализе систем.

16. Граф игры (вершины - игровые состояния, рёбра - разрешённые правилами игры переходы между состояниями (ходы)), используемый в разработке победных стратегий в играх.

17. Компьютерная сеть (вершины - компьютеры или коммуникационные узлы, рёбра - линии связи), используемая в проектировании и анализе компьютерных сетей.

18. Социальный граф (вершины - люди или множества людей, рёбра - отношения знакомства, экономические отношения или другие отношения), используемый в анализе общества и планировании развития.

19. Организационный граф (вершины - люди или множества людей, рёбра - отношения, характеризующие организации, например, частные фирмы, иерархии), используемый в создании организаций и управлении ими.

20. Граф проекта (вершины - работы или состояния проекта, рёбра - отношения между работами или работы, соединяющие состояния), используемый в руководстве проектами.

21. Генеалогическое древо (вершины - люди, рёбра - отношение «родители-дети»), используемый в личных исследованиях.

22. Граф экономических агентов (вершины - экономические агенты - люди, фирмы и др., рёбра - экономические отношения), используемый в экономических исследованиях и планировании.

23. Макроэкономический граф финансового потока (вершины - отрасли экономики, рёбра - финансовые потоки), используемый в экономических исследованиях и планировании.

24. Граф дорог (вершины - города, рёбра - дороги), используемый в развитии транспортной сети.

25. Граф улиц (вершины - перекрёстки, рёбра - улицы), используемый в анализе и планировании потока городского транспорта.

26. Граф электрической цепи (вершины - электромагнитно-активные элементы, рёбра - провода и контакты), используемый в построении и анализе электрических схем.

27. Цепь питания (вершины - породы животных, рёбра - отношения питания), используемый в анализе биосистем.

28. Дерево эволюции (вершины - породы или популяции, рёбра - отношения эволюционного происхождения), используемый в биологии.

29. Граф химических реакций (вершины - векторы количества химических веществ, рёбра - химические реакции), используемый в анализе химических реакций.

30. Граф предшественников химического вещества (вершины - химические вещества, полученные в процессе производства, рёбра - изменения веществ-предшественников в процессе производства), используемый в химической промышленности.

31. Граф реакционной способности химических веществ (вершины - химические вещества, рёбра - способности к реакции), используемый в анализе сложных химических реакций.

32. Граф взрывоопасности (вершины - химические вещества, рёбра - возможности взрывной реакции между ними), используемый для нужд безопасности труда.

33. Граф помех радиосвязи (вершины - радиостанции, рёбра - взаимное перекрытие полос радиоволн), используемый в планировании радиосвязи.

34. Политический граф (вершины - государства, рёбра - границы), используемый в геополитике.

35. Граф кровеносных сосудов (вершины - узлы кровеносных сосудов, рёбра - кровеносные сосуды), используемый в медицине.

36. Граф нейронов (вершины - нейроны, рёбра - места соприкосновения нейронов), используемый в медицине.

37. Граф приготовления кулинарного изделия (вершины - состояния готовности кулинарного изделия, рёбра - переходы между состояниями в процессе приготовлении), используемый в кулинарии.

При разработке схем маршрутов и их оптимизации применяют математический аппарат теории графов, т.е. графоаналитические методы Главная задача при этом заключается в построении графа логистической организации турпродукта (тура).

Приведем ряд примеров приложений теории.

- «Транспортные» задачи, в которых вершинами графа являются пункты погрузки/разгрузки, а ребрами – дороги (автомобильные, железные и др.) и/или другие транспортные (например, авиационные) маршруты. Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т.д., иногда называется задачами обеспечения или задачами о размещении.

- Управление проектами. С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (сетевой график). Совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ). В рамках КСПУ решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев (времени выполнения проекта, затрат, риска и др.).

- Модели коллективов и групп основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и т.д.) – в виде ребер или дуг. Решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия, и др.

Предметом моделирования является взаимодействие двух агентов – производителей одного и того же товара, – каждый из которых выбирает свой неотрицательный объем производства (предложение товара), стремясь максимизировать свою прибыль в условиях, когда рыночная цена убывает с ростом суммарного.

Контрольные вопросы:

1. Примеры решения задач, приводящих к понятию графа: управление проектами, транспортные задачи, модели коллективов и групп.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
4. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
5. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
6. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.
7. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.
8. Маталыцкий М.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М.А. Маталыцкий , Г.А.Хацкевич. – Минск: Вышейшая школа, 2017. – 591 с.: ил.

Тема 10. Функции и пределы.

Вопросы для обсуждения:

1. Функции одной переменной. Определение функции.
2. различные способы задания функции.
3. Предел функции.
4. Свойства пределов функций.
5. Основные замечательные пределы.

Определение функции и способы её задания.

Если каждому числу x из некоторого множества X соответствует одно и только одно число y, то говорят, что на множестве X задана функция.

Переменная x при этом называется независимой переменной (или аргументом), а переменная y – зависимой.

кратко выражают записью: или $y = f(x)$.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$ – областью значений этой функции и обозначается $E(f)$.

Различают следующие способы задания функции : табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

Основными элементарными функциями называются:

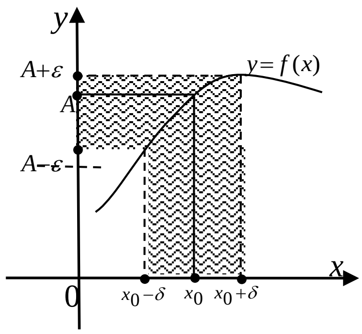
постоянная функция	$y = c$;
степенная функция	$y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
показательная функция	$y = a^{x}$, $a > 0$;
логарифмическая функция	$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
тригонометрические функции	$y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$;
обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$.

Функция, аргумент которой есть функция ($y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$), называется сложной функцией .

Элементарными функциями называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций $(+, -, \cdot, \div)$ и композиций (т.е. образования сложных функций).

Неявной называют функцию, которая задана уравнением вида $F(x, y) = 0$, неразрешенным относительно функции y.

Предел числовой последовательности. Предел функции.



Число A называется пределом последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - A| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

В случае, если последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имеет своим пределом число A, говорят также, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сходится (или стремится) к числу A, и обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она расходится.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Теоремы о пределах.

1. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

2. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Если $c = const$, то. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} C = C$$

3. Предел частного равен частному пределов

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

если предел знаменателя не равен нулю. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

где e — иррациональное число,.$e\approx 2{,}71828$

Непрерывность функции.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Данное определение требует выполнения следующих условий:

Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности;

Пределы слева и справа существуют и равны между собой;

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из указанных условий, то эта точка x_0 называется точкой разрыва функции.

В случае, когда $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, но эти пределы конечные, то точку x_0 называют точкой разрыва первого рода.

Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не существует или равен бесконечности, то x_0называется точкой разрыва второго рода.

Величина $d=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции в точке разрыва x_0.

Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, то она называется непрерывной на этом отрезке.

Контрольные вопросы:

1. Понятие функции, графика функции, области определения и значений функции.
2. Понятие сложной функции.
3. Элементарные функции и их свойства.
4. Понятие предела числовой последовательности.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Правила раскрытия неопределенностей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

4. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, – Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. –303 с.

5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

Тема 11. Производные и дифференциалы.

Вопросы для обсуждения:

1. Производная функции, её геометрический и механический смысл.
2. Основные правила нахождения производной. Дифференциал функции.
3. Производная сложной функции.
4. Применение производных к нахождению наибольших и наименьших значений.
5. Правило Лопиталя и его использование для раскрытия неопределенностей.

Производная - главнейшее понятие математического анализа. Она характеризует изменение функции аргумента x в некоторой точке. При этом и сама производная является функцией от аргумента x.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

То есть,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Наиболее употребительны следующие **обозначения производной**:

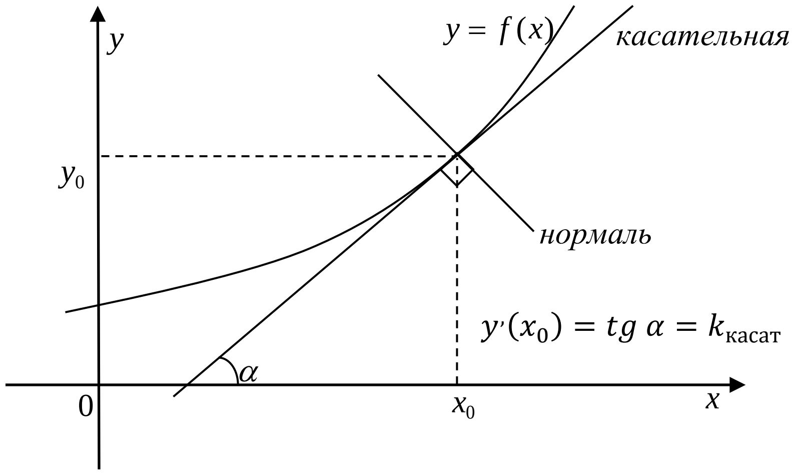
$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется дифференцируемой в этой точке.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл производной

Производная функции в точке x равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x.



Механический смысл производной

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t. $v = s'_t$

Операция нахождения производной называется <u>дифференцированием</u>.

Обозначения: Производную обозначают y' или $\frac{dy}{dx}$.

правила дифференцирования:

1) Постоянное число можно (и нужно) вынести за знак производной

$(Cu)' = Cu'$, где C – постоянное число (константа)

2) Производная суммы равна сумме производных

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) Производная произведения функций

$(uv)' = u'v + uv'$

4) Производная частного функций

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5) Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f\big(\varphi(x)\big)$ — сложная функция, то

$y'_x = f'_u \cdot u'_x$

Таблица производных.

Простая функция	Сложная функция
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbf{R}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in \mathbf{R}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Всякая функция может принимать на отрезке наибольшее и наименьшее значения в критических точках, лежащих внутри отрезка или на его концах.

Пример Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-2;2]$.

Находим критические точки данной функции.

$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 6)' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$;

$x^2 - 2x - 3 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$;

$x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$;

$x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} = 3$

Отрезку $[-2;2]$ принадлежит только одна критическая точка $x_1 = -1$. Вычисляем значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 6 = -1 - 3 + 9 + 6 = 11$;

$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 6 = -8 - 12 + 18 + 6 = 4$;

$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 6 = 8 - 12 - 18 + 6 = -16$.

Сравнивая полученные значения, найдем, что $y(-1) = 11$ есть наибольшее значение функции, а $y(2) = -16$ — наименьшее значение функции на отрезке $[-2;2]$.

Правило Лопиталя и раскрытие неопределённостей

Раскрытие неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и некоторых других неопределённостей, возникающих при вычислении предела отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций значительно упрощается с помощью правила Лопиталя .

Суть правила Лопиталя состоит в том, что в случае, когда вычисление предела отношений двух бесконечно малых или бесконечно больших функций даёт неопределённости видов $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, предел отношения двух функций можно заменить пределом отношения их производных и, таким образом, получить определённный результат.

Предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Контрольные вопросы:

1. Определение производной.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Производная сложной и неявной функции.
4. Основные формулы дифференцирования.
5. Понятие дифференциала функции и его свойства.
6. Правило Лопиталя и его использование для раскрытия неопределенностей.
7. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

Тема 12. Неопределённый интеграл

Вопросы для обсуждения:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Таблица основных неопределенных интегралов.
3. Некоторые способы непосредственного интегрирования.

Первообразной функций для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е. $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = f(x)$

Неопределенным интегралом от функции f (x) называется совокупность всех первообразных для этой функции *f (x) и* обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,.$$

Функция *f (x)* называется подынтегральной функцией, а

f (x)dx – подынтегральным выражением.

Таблица неопределенных интегралов.

$$\int 0*dx = C, \int 1*dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, a \neq 0$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, a \neq 0$$

Свойства неопределенного интеграла

- Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

- Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла (a-const, $a \neq 0$):

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

- Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(x) + C$

Основные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования.

Определение. Непосредственное интегрирование – это вычисление интегралов с использованием основных свойств неопределенных интегралов и табличных интегралов.

Метод подстановки.

Теорема . Если F(x)- первообразная для функции $f(x),\ x \in X$, а функция $x = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке Т, причем множество X – множество значений этой функции – то функция $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\big), t \in T$ также имеет первообразную и справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C = F(x) + C$$

Эта формула называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям.

Замечание. Не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int f d\varphi = f\varphi - \int \varphi df$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие первообразной.
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблицу неопределенных интегралов.
5. Основные методы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, метод подстановки, метод интегрирования по частям)

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

5. Травин В.В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств…: учеб. пособие / В.В. Травин – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил.

Тема 13. Определённый интеграл

Вопросы для обсуждения:

1. Определенный интеграл и способы его вычисления.
2. Основные свойства определённого интеграла .

Теорема. Если на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$

- либо непрерывна,
- либо монотонна,
- либо ограничена и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называют предел ее интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

Свойства определенного интеграла.

- От перестановки пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Если функция **f(x)** интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a < c < b$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx\ , c - const$$

- Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов на тех же отрезках интегрирования.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

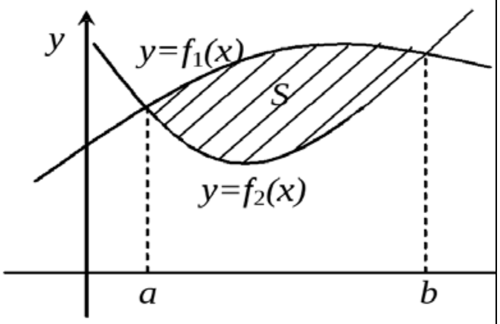
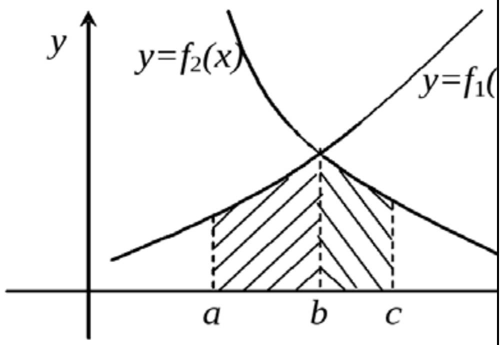
- Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами интегрирования считают равным нулю.

Если $\boldsymbol{F(x)}$ – какая-либо первообразная функции $\boldsymbol{f(x)}$, то справедливо равенство (**формула Ньютона-Лейбница**):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$$

Вычисление площадей криволинейных фигур

Из задачи о площади криволинейной трапеции ясно, что с помощью определенного интеграла можно вычислять площади плоских криволинейных фигур. При этом следует различать два случая.

Площадь заключена между заданными кривыми.	Площадь лежит под (над) заданными линиями (между линиями и осью OX).
	
Тогда, определив точки пересечения линий, т.е. пределы интегрирования, можно найти площадь как разность площадей под вышележащей и нижележащей кривой.	По рисунку видно, что в данном случае общая площадь складывается из площадей под линией $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$
$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$; по свойству линейности $S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$	$S=\int_a^b f_1(x)dx+\int_b^c f_2(x)dx$

Контрольные вопросы:

1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Знать вычисление площадей фигур, ограниченных указанными линиями.
5. Знать вычисление пути, пройденное телом.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

Тема 14. Приложения интегралов в сфере туризма и гостеприимства

Вопросы для обсуждения:

1. Приложения интегралов

Интегральное исчисление дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов, происходящих в экономике. Интегральное исчисление используют для прогнозирования материальных затрат, нахождения потребительского излишка, определения объема выпуска продукции, определения экономической эффективности капитальных вложений. Определённый интеграл является не только мощным средством решения прикладных экономических задач, но и универсальным языком всей экономической теории, создает новые возможности для экономических исследований.

Примеры использования интегрального исчисления.

Определения объема выпуска продукции.

Задача. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

$f(t) = \frac{3}{3t+1} + 4.$

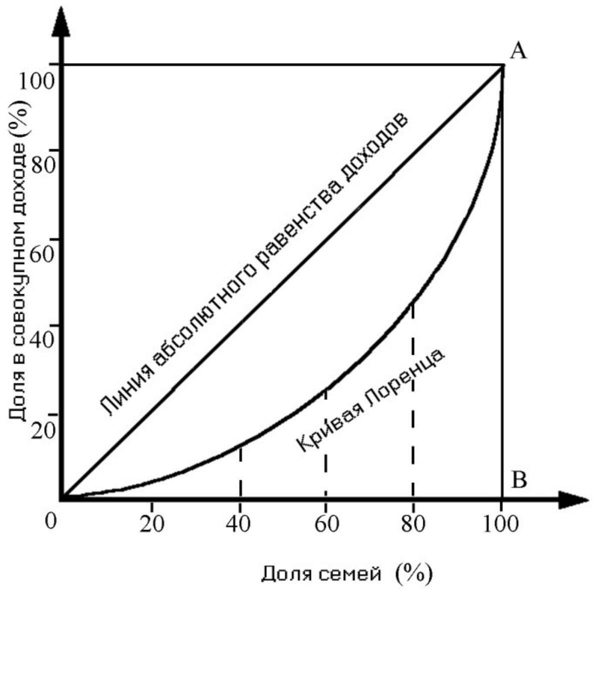
Решение. Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1до t_2будет выражаться формулой

$$\boldsymbol{V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}$$

В нашем случае $V = \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4\right) dt$

«Кривая Лоренца» и «коэффициент Джини»

применение интегралов для анализа социально-экономического строения общества являются так называемые «кривая Лоренца» и «коэффициент Джини», показывающие, какая доля совокупного дохода приходится на каждую группу населения, что позволяет судить об уровне экономического неравенства в данной стране.



Строится кривая Лоренца следующим образом: на оси абсцисс (горизонтальной) откладывается число всех семей, принятое за 100%, на оси ординат – величина их совокупных доходов, составляющая в сумме 100%. Затем число семей делится на 10 равных групп (децилей), вверх откладывается размер дохода каждой децильной группы.

Если все богатство страны находится в руках небольшого числа семей, кривая Лоренца будет практически совпадать с горизонтальной осью, и только на цифре 98 –99% подскочит сразу до 100%.

Если у всех семей уровень дохода одинаков (т.е.20% семей получает 20% совокупного денежного дохода, 50% семей – 50% дохода и т.д.), то кривая Лоренца совпадет с биссектрисой угла на графике распределения доходов.

Кривая Лоренца позволяет наглядно сравнивать, как меняется распределение доходов семей в одной и той же стране в различные годы, или каково оно в разных странах в одно и тоже время. Это – графическое отражение уровня благосостояния в стране.

Кривая Лоренца

Линия OB называется линией **абсолютного равенства**. Ломаная линия OAB - это **линия абсолютного неравенства. Реальное распределение доходов** в обществе характеризуется кривой ODB и степенью ее отклонения от биссектрисы.

Отклонения кривой Лоренца от биссектрисы можно измерить через отношение площади фигуры, образованной кривой Лоренца (ODB) и кривой равенства (OB), к площади треугольника, образованного кривыми равенства (OB) и неравенства (OAB). В результате получим показатель, характеризующий степень неравенства, который в экономической литературе получил название коэффициента Джини, который рассчитывается следующим образом: $G = \frac{S_{ODB}}{S_{OAB}}$. ($\boldsymbol{G = \frac{S_1}{S_1+S_2}}$)

Этот коэффициент может принимать значения от 0 до 1. Чем больше значение коэффициента, тем дальше кривая Лоренца отстоит от биссектрисы и тем сильнее неравенство. «Кривая Лоренца» и «коэффициент Джини» можно использовать для оценки распределения заработной платы в фирме.

Соответствующие функции Джини наверняка будут довольно сложными и без интегралов не обойтись.

Нахождение дисконтированной стоимости денежногопотока.

Еще одним примером приложения определенного интеграла является нахождение *дисконтированной стоимости денежного потока.*

Допустим, что для каждого дискретного момента времени t= 1, 2, 3, ... задана величина денежного потока *R((t).*Если ставку процента обозначить через *p,* то дисконтированную стоимость каждой из величин *R(1), R(2), R(3), ...* найдем по известным формулам:

$R(1)(1 + p)^{-1}$, $R(2)(1 + p)^{-2}$, $R(3)(1 + p)^{-3}$, … .

Тогда дисконтированную стоимость денежного потока найдем, суммируя эти величины:

$$\Pi = \sum_{t=1}^{n} R(t)(1+p)^{-t},$$

где *n* - общее число периодов времени.

В непрерывной модели время изменяется непрерывно, т.е. для каждого момента времени $0 \le t \le T$, где [0, T] - рассматриваемый период времени, задана величина I(t) - скорость изменения денежного потока (т.е. величина денежного потока за промежуток времени от *t*до *t + dt* приближенно равна I*(t)dt.* Для получения величины П изменим формулу $\Pi = \sum_{t=1}^{n} R(t)(1+p)^{-t}$.А именно, знак суммирования заменим на знак определенного интеграла, формулы вычисления дисконтированной стоимости в дискретном случае заменим на их непрерывный аналог, и тогда формула $\Pi = \sum_{t=1}^{n} R(t)(1+p)^{-t}$, примет следующий вид:

$$\Pi = \int_{0}^{T} I(t)e^{-pt}dt.$$

Дисконтирование является одной из наиболее значимых операций, в стоимости будущих потоков денежных средств. Дисконтированная стоимость широко применяется при экономических и при финансовых расчетах и является инструментом сравнения стоимости денежных платежей в разные периоды времени. Эта характеристика позволяет определить инвестору, какое количество денежных средств нужно вложить в экономическую отрасль, с целью получения увеличенного дохода в будущем – оценить эффективность капиталовложений. Так как экономические процессы постоянно меняются, то при вложении денежных средств в отрасль в краткосрочный и долгосрочный период эти факторы изменения необходимо учитывать. В краткосрочном периоде, при стабильных экономических показателях, номинальная цена денежных средств будет иметь приблизительно равную ценность. В долгосрочном периоде ценность денежных средств может кардинально изменяться. Поэтому в экономических подходах дисконтирование является функцией многих факторов, например таких как: инфляция, будущая стоимость денег с учетом фактора времени и.т.д. Существует множество способов нахождения дисконтированной стоимости денежного потока, как с экономических, так и с математических подходов.

Контрольные вопросы:

1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Знать вычисление площадей фигур, ограниченных указанными линиями.
5. Знать вычисление пути, пройденное телом.
6. Приложения интегралов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

Рассмотрено и утверждено на заседании НМС университета 27.12.2019 протокол № 3

Тема 15. Статистическое распределение и его числовые характеристики. Статистическое оценивание. Проверка статистических гипотез.

Вопросы для обсуждения:

1. Статистическое распределение и его числовые характеристики.
2. Числовые характеристики дискретных и интервальных вариационных рядов.
3. Графическое изображение вариационных рядов: гистограмма, полигон.
4. Среднее арифметическое, размах и мода, медиана ряда.
5. Применение статистического оценивания в задачах

Математическая статистика изучает методы сбора и обработки **статистической информации** для получения научных и практических выводов. Статистическую информацию можно выразить числами. Эта информация появляется в результате исследования массовых (обычно) явлений, которые носят случайный характер.

Основным методом математической статистики является **выборочный метод**, его суть состоит в исследовании представительной выборочной совокупности – для достоверной характеристики совокупности генеральной. Данный метод экономит временные, трудовые и материальные затраты, поскольку исследование всей совокупности зачастую затруднено или невозможно.

Вся совокупность явлений или объектов, подлежащих статистическому исследованию, называется генеральной совокупностью.

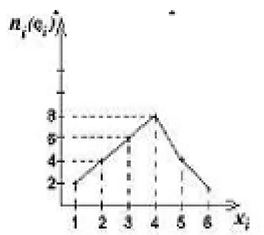
Из всей генеральной совокупности для обследования выбирают небольшое (по сравнению с генеральной совокупностью) конечное множество элементов, которые составляют случайную выборку.

Полученные экспериментальные значения называются ***вариантами***, а их совокупность – **вариационным рядом**.

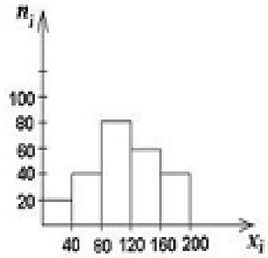
Выборочный метод состоит в том, что на основании изучения признака в выборке делается вывод о характере распределения признака во всей генеральной совокупности.

Графическое изображение вариационного ряда позволяет представить в наглядной форме закономерности варьирования значений признака. Наиболее широко используются следующие виды графического изображения вариационных рядов: полигон, гистограмма, кумулятивная кривая.

Определение 1. **Полигоном частот** называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{n_1}), (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{n_2}), \ldots, (\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{n_i})$



Определение 2. Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, n_i / h построенную из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длина h, а высоты равны величине - плотности частоты. Предполагается, что выборка задана в виде последовательности интервалов.



Полигон служит для изображения дискретного вариационного ряда. ***Гистограмма*** служит для изображения только интервального вариационного ряда.

Графики являются наглядной формой отображения рядов распределения. Для изображения рядов применяются линейные графики и плоскостные диаграммы, построенные в прямоугольной системе координат.

Для графического представления атрибутивных рядов распределения используются различные диаграммы: столбиковые, линейные, круговые, фигурные, секторные и т. д.

К показателям положения центра распределения относится степенная средняя в виде средней арифметической и структурные средние – мода и медиана.

Модой называют значение, которое в вариационном ряду встречается чаще других. Моду можно найти на гистограмме как самый высокий столбец.

Например, в выборке, значения которой 20, 50, 60, 70, 80, 20, 20, 75, 70, 20, 80, 20, 50, 60, модой является 20.

Медианой называют значение, которое находится в середине вариационного ряда. Первая половина элементов выборки меньше этого значения, а вторая половина – больше.

Если в выборке нечётное число элементов, то за медиану принимают собственно серединное значение. Например, в выборке, значения которой 14, 15, 18, 21, 27, медианой является 18.

Если в выборке чётное число элементов, то медиану находят, выбирая два значения, которые находятся в середине и вычисляя их среднее арифметическое. Например, есть выборка 11, 14, 15, 18, 21, 27. Медиану находят так: (15+18)/2 = 16,5.

Контрольные вопросы:

1. Графическое изображение вариационных рядов: гистограмма, полигон.
2. Среднее арифметическое, размах и мода, медиана ряда.
3. Применение статистического оценивания в задачах.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /
А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА –М, 2015. – 491 с.: ил.

Тема 16. Элементы регрессионного и корреляционного анализа

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие регрессионной модели.
2. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов.
3. Вычисление коэффициентов корреляции по различным шкалам измерений.

Определение статистически значимых коэффициентов корреляции.

Часто при исследовании объекта или его модели необходимо наблюдать за характеристиками двух и более случайных величин. При этом может возникнуть вопрос: есть ли *связь* между этими случайными величинами?

Статистические связи между переменными можно изучать методами корреляционного и регрессионного анализа. Основной задачей корреляционного анализа является выявление связи между случайными переменными и оценка её степени. Основной задачей регрессионного анализа является установление формы и изучение зависимости между переменными.

Корреляционный анализ - это совокупность методов обнаружения зависимости (корреляции) между двумя или более случайными признаками или процессами. Под *корреляцией* понимается статистическая зависимость между двумя случайными величинами, не имеющая строго функционального характера. корреляционный *анализ* не позволяет определить вид функциональной связи между случайными величинами, а только наличие или отсутствие предполагаемой связи, например, линейной, параболической, экспоненциальной и т. д. **Целью корреляционного анализа** является выявление оценки силы связи между случайными величинами (признаками), которые характеризует некоторый реальный процесс.

Задачи корреляционного анализа:

а) Измерение степени связности (тесноты, силы, строгости, интенсивности) двух и более явлений.

б) Отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак, на основании измерения степени связности между явлениями. Существенные в данном аспекте факторы используют далее в регрессионном анализе.

в) Обнаружение неизвестных причинных связей.

Формы проявления взаимосвязей весьма разнообразны. В качестве самых общих их видов выделяют функциональную (полную) и **корреляционную (неполную) связи**. *Корреляционная связь* проявляется в среднем, для массовых наблюдений, когда заданным значениям зависимой переменной соответствует некоторый ряд вероятностных значений независимой переменной. **Связь называется корреляционной**, если каждому значению факторного признака соответствует вполне определенное неслучайное значение результативного признака.

Регрессионный анализ является одним из наиболее распространённых методов обработки экспериментальных данных при изучении зависимостей в физике, биологии, экономике, технике и других областях.

Регрессия – статистический метод, который используется для описания характера связи между переменными (положительная или отрицательная, линейная или нелинейная зависимость).

Исследование объективно существующих связей между явлениями – важнейшая задача общей теории статистики. Регрессионный анализ заключается в определении аналитического выражения, в котором изменение одной величины (называемой зависимой или результативным признаком) y обусловлено влиянием одной или нескольких независимых величин (факторов) $x_1, x_2, \dots, x_n$, а множество всех прочих факторов, также оказывающих влияние на зависимую величину, принимается за постоянные и средние значения. При обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей: получен ряд значений переменных x и y

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Требуется найти аналитическое выражение $y = y(x)$. Искомую формулу можно получить с помощью метода наименьших квадратов.

Если установлено, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, то значения параметров a и b этой эмпирической формулы находят по методу наименьших квадратов из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов применяется для решения различных математических задач и основан на минимизации суммы квадратов отклонений функций от исходных переменных.

Более совершенным показателем степени тесноты *корреляционной связи* является **линейный коэффициент корреляции**. При расчете этого показателя учитываются не только отклонения индивидуальных значений признака от средней, но и сама величина этих отклонений.

Значения коэффициента корреляции

Коэффициент корреляции изменяется на отрезке от –1 до +1.

Если между переменными существует сильная **положительная** связь, то значение *r будет близко к +1.*

Если между переменными существует сильная **отрицательная** связь, то значение *r будет близко к –1.*

Когда между переменными нет линейной связи или она очень **слабая**, значение r будет близко к 0.

Интерпретация коэффициента корреляции

Значение *r Уровень связи между переменными*

0,75 – 1.00 Очень высокая положительная

0,50 – 0.74 Высокая положительная

0,25 – 0.49 Средняя положительная

0,00 – 0.24 Слабая положительная
0,00 – -0.24 Слабая отрицательная
-0,25 – -0.49 Средняя отрицательная
-0,50 – -0.74 Высокая отрицательная
-0,75 – -1.00 Очень высокая отрицательная

Выборочным коэффициентом корреляции, более подробно, выборочным линейным парным коэффициентом корреляции К. Пирсона, как известно, называется число:

Обозначается буквой r. Вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – средние арифметические значения показателей x и y; σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения; n – число измерений (испытуемых).

Его свойства:

1) Значения r могут изменяться от –1 до 1.

2) В случае r=-1 и r=1 взаимосвязь функциональная, соответственно, отрицательная и положительная.

3) При r=0 линейная взаимосвязь не установлена, но при этом может наблюдаться взаимосвязь другой формы.

4) При $r<0$ взаимосвязь отрицательная, при $r>0$ – положительная.

Если измерения проводятся в шкале интервалов или отношений, для оценки тесноты взаимосвязи вычисляют коэффициент корреляции Бравэ-Пирсона; в ранговой шкале вычисляют ранговый коэффициент корреляции Спирмэна.

Ранговый коэффициент корреляции Спирмэна вычисляют по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \bullet \sum d^2}{n(n^2 - 1)},$$

где $d = d_x - d_y$ – разность рангов данной пары показателей X и Y; n – объем выборки.

Отметим, что коэффициент ранговой корреляции Спирмена остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений.

Контрольные вопросы:

1. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов.
2. Вычисление коэффициентов корреляции по различным шкалам измерений: коэффициент ранговой корреляции Спирмена.
3. Вычисление коэффициентов корреляции по различным шкалам измерений: коэффициент корреляции К. Пирсона

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск,2017. –303 с.

4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА –М, 2015. –491 с.: ил.

5. Буснюк, Н.Н.Математическое моделирование: учеб. пособие / Н.Н. Буснюк, А.А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.: ил.

Тема 17. Математическое моделирование в туристической деятельности.

Вопросы для обсуждения:

1. Понятие о математическом моделировании.
2. Этапы построения и исследования простейших математических моделей.
3. Простые и сложные проценты в процессе построения моделей.

Решение практических задач математическими методами последовательно осуществляется путем формулировки задачи (разработки математической модели), выбора метода исследования полученной математической модели, анализа полученного математического результата.

Математическая модель представляет собой формализованное описание системы (или операции) на некотором абстрактном языке, например, в виде совокупности математических соотношений или схемы алгоритма, т. е. такое математическое описание, которое обеспечивает имитацию работы систем или устройств на уровне, достаточно близком к их реальному поведению, получаемому при натурных испытаниях систем или устройств. Любая ММ описывает реальный объект, явление или процесс с некоторой степенью приближения к действительности. Вид ММ зависит как от природы реального объекта, так и от задач исследования.

Математическое моделирование общественных, экономических, биологических и физических явлений, объектов, систем и различных устройств является одним из важнейших средств познания природы и проектирования самых разнообразных систем и устройств.

Целью математического моделирования является анализ реальных процессов (в природе или технике) математическими методами.

Этапы построения математической модели.

Сущность построения математической модели состоит в том, что реальная система упрощается, схематизируется и описывается с помощью того или иного математического аппарата. Можно выделить следующие основные этапы построения моделей.

1. Содержательное описание моделируемого объекта. Объекты моделирования описываются с позиций системного подхода. Исходя из цели исследования устанавливаются совокупность элементов, взаимосвязи между элементами, возможные состояния каждого элемента, существенные характеристики состояний и соотношения между ними. Например, фиксируется, что если значение одного параметра возрастает, то значение другого - убывает и т.п. Вопросы, связанные с полнотой и единственностью набора характеристик, не рассматриваются. Естественно, в таком словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности. Это исходная естественно-научная концепция исследуемого объекта. Такое предварительное, приближенное представление системы называют концептуальной моделью. Для того чтобы содержательное описание служило

хорошей основой для последующей формализации, требуется обстоятельно изучить моделируемый объект. Нередко естественное стремление ускорить разработку модели уводит исследователя от данного этапа непосредственно к решению формальных вопросов. В результате построенная без достаточного содержательного базиса модель оказывается непригодной к использованию.

На этом этапе моделирования широко применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.

2. Формализация операций. Формализация сводится в общих, чертах к следующему. На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы. Для выделения существенных характеристик необходим хотя бы приближенный анализ каждой из них. При проведении анализа опираются на постановку задачи и понимание природы исследуемой системы. После исключения несущественных характеристик выделяют управляемые и неуправляемые параметры и производят, символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают.

Дальнейшие действия связаны с формированием целевой функции модели. В соответствии с известными положениями выбираются показатели исхода операции и определяется примерный вид функции полезности на исходах. Если функция полезности близка к пороговой (или монотонной), то оценка эффективности решений возможна непосредственно по показателям исхода операции. В этом случае необходимо выбрать способ свертки показателей (способ перехода от множества показателей к одному обобщенному показателю) и произвести саму свертку. По свертке показателей формируются критерий эффективности и целевая функция.

Если при качественном анализе вида функции полезности окажется, что ее нельзя считать пороговой (монотонной), прямая оценка эффективности решений через показатели исхода операции неправомочна. Необходимо определять функцию полезности и уже на ее основе вести формирование критерия эффективности и целевой функции.

В целом замена содержательного описания формальным - это итеративный процесс.

3. Проверка адекватности модели. Требование адекватности находится в противоречии с требованием простоты, и это нужно учитывать при проверке модели на адекватность. Исходный вариант модели предварительно проверяется по следующим основным аспектам:

- Все ли существенные параметры включены в модель?
- Нет ли в модели несущественных параметров?
- Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
- Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

Для проверки рекомендуется привлекать специалистов, которые не принимали участия в разработке модели. Они могут более объективно рассмотреть модель и заметить ее слабые стороны, чем ее разработчики. Такая предварительная проверка модели позволяет выявить грубые ошибки. После этого приступают к реализации модели и проведению исследований. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемого объекта. Для установления соответствия создаваемой модели оригиналу используются следующие пути:

• сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях;

• использование других близких моделей;

• сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом.

Главным путем проверки адекватности модели исследуемому объекту выступает практика. Однако она требует накопления статистики, которая далеко не всегда бывает достаточной для получения надежных данных. Для многих моделей первые два пути приемлемы в меньшей степени. В этом случае остается один путь: заключение о подобии модели и прототипа делать на основе сопоставления их структур и реализуемых функций. Такие заключения не носят формального характера, поскольку основываются на опыте и интуиции исследователя.

По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности ее практического использования или о проведении корректировки.

4. Корректировка модели. При корректировке модели могут уточняться существенные параметры, ограничения на значения управляемых параметров, показатели исхода операции, связи показателей исхода операции с существенными параметрами, критерий эффективности. После внесения изменений в модель вновь выполняется оценка адекватности.

5. Оптимизация модели. Сущность оптимизации моделей состоит в их упрощении при заданном уровне адекватности. Основными показателями, по которым возможна оптимизация модели, выступают время и затраты средств для проведения исследований на ней. В основе оптимизации лежит возможность преобразования моделей из одной формы в другую. Преобразование может выполняться либо с использованием математических методов, либо эвристическим путем.

Практическое значение моделирования заключается в том, что:

1. Модели более удобны для исследования, чем исходные объекты. Кроме того, некоторые объекты можно изучить только на моделях.

2. Моделирование позволяет выявить наиболее существенные факторы изучаемого объекта или явления, поэтому является инструментом для более глубокого изучения реальности.

Моделирование в туризме заключается в построении и изучении специальных моделей, свойства которых являются важными с точки зрения исследователя. Оно позволяет изучать построение и использование моделей для познания реальных процессов в туризме, т.е. основывается на исходных понятиях и определениях, позволяющих понимать язык, применяемый в исследовании.

Модель может предусматривать конструирование таких направлений,

▪ как социально-экономическая сущность туризма;

- факторы и механизмы повышения социальной эффективности туризма;
- развитие профессионального мышления менеджеров и их правовой статус;
- принципы и закономерности функционирования туризма в экономической и культурной среде.

Понятие «процент» широко используется при моделировании в экономике, статистике, социологии, в различных отраслях науки и техники. Задачи, связанные с процентами, особенно часто встречаются в банковском деле.

Процентом называется сотая часть величины. При письме слово процент обозначается знаком %.

Предоставляя свои финансовые ресурсы в долг, их собственник рассчитывает получить определенный доход, в виде процентов, начисляемых по некоторому алгоритму в течение определенного промежутка времени. Стандартным временным интервалом в финансовых операциях является один год. Поэтому наиболее распространен вариант, когда процентная ставка устанавливается в виде годовой ставки, подразумевающей однократное начисление процентов по истечении года.Известны две основные схемы дисконтированного начисления процентов: схема простых процентов и схема сложных процентов.

Простые проценты — метод расчета процентов, при котором начисления происходят на первоначальную сумму вклада (долга).

Простыми процентами можно считать вклад (долг) только в том случае, если происходит однократная выплата процентов и всей суммы вклада(долга) одновременно, при этом полностью отсутствует возможность досрочной частичной или полной выплаты вклада (долга) и/или полностью отсутствует возможность продления вклада (долга).

Формула простых процентов:

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot n\right),$$

где S_0- вкладываемая сумма, S_n- получаемая сумма с процентами, r - ставка процента за период (обычно за 1 год, но могут использоваться и другие периоды), n - число периодов начисления.

Сложные проценты — эффект часто встречающийся в экономике и финансах, когда проценты прибыли в конце каждого периода прибавляются к основной сумме и полученная величина в дальнейшем становится исходной для начисления новых процентов.

Формула сложных процентов:

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n,$$

где S_0 - вкладываемая сумма, S_n - получаемая сумма с процентами, r - ставка процента за один период (опять-таки обычно за 1 год, но могут использоваться и другие периоды), n - число периодов начисления.

Контрольные вопросы:

1. Понятие о математическом моделировании.
2. Этапы построения и исследования простейших математических моделей.
3. Формулы для вычисления простых и сложных процентов в процессе построения моделей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. /

А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.
3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.
4. Буснюк, Н.Н.Математическое моделирование: учеб. пособие / Н.Н. Буснюк, А.А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.: ил.
5. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.

Тема 18 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Модели соперничества

Вопросы для обсуждения:

1. Общие представления о дифференциальных уравнениях.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Общее решение (общий интеграл) уравнения.
4. Частные решения задач.
5. Модели соперничества.

Теория дифференциальных уравнений позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами детерминированности, конечномерности и дифференцируемости.

Дифференциальным уравнением называют уравнение, в котором неизвестной является функция одной или нескольких переменных, причем в уравнение входят производные или дифференциалы искомой функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют **обыкновенным**, если от двух и более, то **уравнением в частных производных.**

Порядок наивысшей производной (или дифференциала), входящей в уравнение, называется **порядком уравнения.**

Любая функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется **решением** или **интегралом этого уравнения.**

Обыкновенное дифференциальное уравнение задается соотношением вида

$$F(x, y, y') = 0\ , F(x, y, y'') = 0\ , F(x, y, y', y'', \dots, y^{\boldsymbol{n}}) = 0$$

Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком этого** уравнения.

Нахождение решения дифференциального уравнения называют **интегрированием** уравнения, а график решения – **интегральной кривой.**

Общим решением или интегралом дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение **первого порядка** имеет вид

$F(x, y, y') = 0$

Если уравнение можно разрешить относительно производной, то получаем **уравнение первого порядка в нормальной форме**:

$y' = f(x, y)$

Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения в большом спектре наук. Исследования природных процессов и изучение закономерностей общественных процессов приводят к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения. В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является изучение функций, представляющих собой решения этих уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры применения теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики, где независимой переменной является время t. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени; они являются предметом исследования экономической динамики.

Модели соперничества в сфере туризма и гостеприимства.

Сложность проблем развития туризма требует разработки эффективных подходов к прогнозированию различных процессов, происходящих в этой отрасли. В настоящее используется два подхода к построению прогнозных оценок.

- Традиционный. Связан с использованием эконометрических моделей на основе неоклассического подхода.
- С применением эволюционно-ориентированного подхода.

Основные принципы эволюционно-ориентированного подхода, который может быть использован и для прогнозных оценок изменения показателей сферы туризма были заимствованы из биологии. При таком подходе в фокусе анализа находятся механизмы развития неравновесных процессов, а экономика рассматривается как динамическая система, которая постоянно претерпевает изменения различного характера

Первая простейшая модель соперничества двух биологических видов, один из которых (жертва) является основной пищей для другого (хищник), была независимо предложена А.Лоткой и В. Вольтерра. Модель Лотки-Вольтерра описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - cxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + fxy \end{cases} \qquad (1)$$

В этих уравнениях x и y – численности популяций жертв и хищников соответственно (например, зайцев и лисиц), а коэффициенты $a,\ b,\ c$ и считаются положительными константами. Записанные на основе чисто интуитивных представлений, эти уравнения качественно могут быть обоснованы следующим образом. Численность популяции зайцев увеличивается со скоростью, пропорциональной числу x уже имеющихся особей, но убывает пропорционально произведению xy числа зайцев и лисиц. Аналогично, численность лисиц увеличивается со скоростью, пропорциональной числу «встреч» лисиц и зайцев, и убывает пропорционально числу имеющихся лисиц (в отсутствие зайцев, которые в этой модели являются единственно доступной пищей, лисицы погибают от голода). Таким образом, каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию зайцев, но увеличивает популяцию лисиц.

В рассматриваемой простейшей модели двухвидовой биологической системы пренебрегается целым рядом факторов, влияющих на реально происходящие процессы. Например, численности популяций считаются зависящими только от времени, поскольку не учитывается пространственное распределение популяций на занимаемой территории. Далее, пренебрегается естественной смертностью жертвы и естественной рождаемостью хищника, которые считаются малыми по сравнению с изменением численности за счет учитываемых в модели процессов. Пренебрегается существующей временной задержкой между моментами питания лисиц и моментами появления потомства в результате добывания пищи и т.д.

Система уравнений (1) решается совместно с начальными условиями $x(0) = X_q$ и $y(0) = y_0$ x(0) $= X_q$ y(0) = y_0; это означает, что эволюция биологической системы определяется исключительно ее начальным состоянием и не зависит от «истории» попадания системы в это начальное состояние. В действительности это предположение представляет собой весьма сильное допущение, ибо поведение лисиц и зайцев может быть совершенно различным в нормальных естественных условиях и при стрессе, вызванном какой-либо катастрофой, например лесным пожаром, землетрясением и т.д.

Чтобы понять решение, преобразуем систему уравнений(1) к виду

$$y(fx - b)dx = x(a - cy)dy \quad (2)$$

для чего достаточно просто разделить почленно одно уравнение системы на другое. Из соотношения (2) вытекает равенство

$$b\frac{dx}{x} - fdx + a\frac{dy}{y} - cdy = 0 \quad (3)$$

Интегрируя (3), приходим к соотношению

$$blnx - fx + alny - cy = C_1 \quad (4)$$

Константа C_1 в правой части (4) зависит от начальных условий X_q и y_0 Xq и y0. Соотношение (4) означает, что система уравнений (1) имеет интеграл вида

$$ln\, x^b + ln\, e^{-fx} + ln\, y^a + ln\, e^{-cx} = C_1 \quad (5)$$

Потенцируя выражение (5), получаем этот интеграл в виде

$$x^b e^{-fx} = Cy^{-a} e^{cy} \quad (6)$$

Чтобы яснее понять временную динамику функций перепишем уравнения (1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\ln x = a - cy \\ -\dfrac{d}{dy}\ln y = b - fx \end{cases} \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (7). Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} aT - c\int_0^T y(t)dt = 0 \\ bT - b\int_0^T x(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Из соотношений (8) следуют формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{a}{c} \\ \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{b}{f}, \end{aligned} \quad (9)$$

которые означают, что отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{f}$ равны средним значениям по периоду колебаний функций $y(t)$ и $x(t)$ соответственно. Амплитуда и период колебаний определяются начальными значениями x_0 и y_0 численностей популяций. Колебания, сущность которых понятна из интуитивных соображений и которые реально наблюдаются в природе, означают возникновение в двухвидовых популяционных системах значительно более сложных процессов, чем в одновидовых системах, описываемых мальтузианской, логистической или другими моделями.

Простейшая жесткая модель Лотки—Вольтерра не обладает свойствами структурной устойчивости: при малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а испытывают осцилляции. Амплитуды и период осцилляций могут быть просто установлены при малых отклонениях от положения равновесия, при которых нелинейные уравнения (1) могут быть линеаризованы.

Контрольные вопросы:

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.
3. Частное решение дифференциального уравнения.
4. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.
5. Экономические приложения дифференциальных уравнений.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гусак, А. А.Основы высшей математики: пособие для студентов вузов/ А. А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск, ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов: в 2 т. / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск, 2004.

3. Рябушко, А.П.Высшая математика: теория и задачи:учеб. пособие. В 5 ч./А.П. Рябушко, Т.А. Жур, –Минск, Вышейшая школа. –2-е изд. – Минск, 2017. – 303 с.

4. Кастрица,О. А.Высшая математика для экономистов: учеб. пособие / О.А. Кастрица,О. А. – 4-е изд.,стер. – Минск : Новое знание; М.:ИНФРА – М, 2015. – 491 с.: ил.